日本シミュレーション学会
第9回計算電気・電子工学シンポジウム
——1988年3月——

I－2

三次元磁界解析におけるゲージ条件について

新潟大学　東京工科大学　アルプス電気(株)　北海道大学

°金井　靖[1], 阿部武雄[2], 飯島泰蔵[3], 飯塚雅博[4], 武笠幸一[5]

1．はじめに

有限要素法は磁界解析に対し汎用性が高く、二次元問題に対しては既に磁気ベクトルポテンシャルを用いた手法が確立されている。[1],[2]

近年は三次元問題の研究がさかんに行なわれ、磁気ベクトルポテンシャル法[3]-[5]、電流ベクトルポテンシャルー磁気スカラーポテンシャル法[6]、ツースカラーポテンシャル法[7] 等が提案されているが、いまだに解析手法が確立されていない。特に磁気ベクトルポテンシャル法ではゲージ条件の必要性が当初より議論されてきたが、静磁界解析においてもその必要性が明らかでないのが現状である。[8]-[10] 本報では異なる磁性体の境界における接合条件とゲージ条件との関係を明らかにし、接合条件を完備するためにはゲージ条件が必要であることを述べる。これをもとに、ガラーキン法により離散化を行う。離散化式における面積積分項は接合条件から消去可能であり、また、Dirichlet, Neumannの条件にも適合することを示す。得られた有限要素式はゲージ条件を含んでおり、また、磁気ベクトルポテンシャルの三成分を分離できるため計算機のメモリー、計算時間の節約が可能である。

2．支配方程式

静磁界における Maxwellの方程式は次式となる。

$$\mathrm{rot}\ \mathbf{H} = \mathbf{J}_o \quad , \qquad (1)$$

$$\mathrm{div}\ \mathbf{B} = 0 \quad . \qquad (2)$$

1）自然科学研究科　2）工学部教授　〒950-01　新潟市五十嵐2 の町8050

3）工学部教授　〒192 八王子市片倉町1404　4）長岡工場技術部　〒940 長岡市東高見1-3-5

5）工学部教授　〒060 札幌市北区北13西8

ただし、　$\mathbb{H}$：磁界強度、　$\mathbb{B}$：磁束密度、　$\mathbb{J}_o$　：強制電流密度。

また、構成方程式として次式を考える。

$$\mathbb{B} = \mu_o \mathbb{H} + \mathbb{M} . \tag{3}$$

ただし、μ_0：真空中の透磁率、　$\mathbb{M}$：磁化。

式（2）から式（4）に示す磁気ベクトルポテンシャルAを定義できる。

$$\mathbb{B} = \mathrm{rot}\ \mathbb{A} . \tag{4}$$

式（4）の$\mathbb{A}$には grad ϕ なる不定性が許される。この不定性を抑えるために次式に示すCoulombのゲージを用いる。

$$\mathrm{div}\ \mathbf{A} = 0 . \tag{5}$$

式（1）、（3）、（4）より、次式を得る。

$$\frac{1}{\mu_o}\left(\mathrm{grad\ div}\ \mathbb{A} - \nabla^2\mathbb{A}\right) - \frac{1}{\mu_o}\ \mathrm{rot}\ \mathbb{M} = \mathbb{J}_o . \tag{6}$$

式（6）に式（5）を代入すれば次式を得る。

$$\frac{1}{\mu_o}\ \nabla^2\mathbb{A} + \frac{1}{\mu_o}\ \mathrm{rot}\ \mathbb{M} + \mathbb{J}_o = \mathbb{O} . \tag{7}$$

３．磁性体の境界における接合条件

図１に示すように解析領域中に磁性体の境界が存在する場合、その境界における接合条件を吟味する必要がある。

式（1）、（2）より磁性体の境界における接合条件は次式となる。

$$\mathbb{H} \times \mathbf{n}\ :\ \mathrm{continuous}\ , \tag{8}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}\ :\ \mathrm{continuous}\ . \tag{9}$$

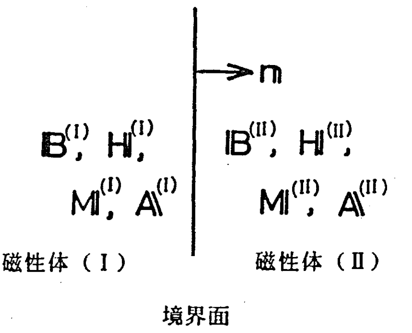

図１．磁性体の境界における接合条件

いま、直角座標系（ｘ，ｙ，ｚ）を考え、接合面をｙ－ｚ平面にとれば式（8）、（9）は次式となる。

$$\mathbb{H} \times \mathbf{n} = \mathbb{j}\, H_z - \mathbb{k}\, H_y\ :\ \mathrm{continuous}\ , \tag{10}$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{n} = B_x\ :\ \mathrm{continuous}\ . \tag{11}$$

式（３）、（４）、（１０）、（１１）より磁性体（Ｉ）側と（Ⅱ）側の接合条件として次式が成り立たねばならない。

$$\frac{1}{\mu_o}\left[\left(\frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial z}-\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x}\right)-M_y^{(I)}\right]=\frac{1}{\mu_o}\left[\left(\frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial z}-\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x}\right)-M_y^{(II)}\right], \quad (12)$$

$$\frac{1}{\mu_o}\left[\left(\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x}-\frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial y}\right)-M_z^{(I)}\right]=\frac{1}{\mu_o}\left[\left(\frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x}-\frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial y}\right)-M_z^{(II)}\right], \quad (13)$$

$$\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial y}-\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial z}=\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial y}-\frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial z}. \quad (14)$$

ただし、右肩の添字（Ｉ）、（Ⅱ）はそれぞれ磁性体（Ｉ）、（Ⅱ）側を表す。

Coulomb のゲージ条件（５）の他に接合面上における$\mathbb{A}$の連続性を仮定すれば、式（１２）～（１４）より次式を得る。

$$\frac{\partial A_x^{(I)}}{\partial x}=\frac{\partial A_x^{(II)}}{\partial x} \qquad A_x^{(I)}=A_x^{(II)}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x}-M_z^{(I)}=\frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x}-M_z^{(II)}, \qquad A_y^{(I)}=A_y^{(II)}, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x}-M_y^{(I)}=-\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x}-M_y^{(II)}, \qquad A_z^{(I)}=A_z^{(II)}. \quad (17)$$

式（１５）～（１７）が成立すれば、式（５）、（１２）～（１４）は十分に成立する。また、$\mathbb{A}$に対する接合条件は完備されている。

一方、接合面上における$\mathbb{A}$の連続性は仮定するが、Coulomb のゲージ条件（５）を用いない場合には、式（１２）～（１４）より次式を得る。

$$A_x^{(I)}=A_x^{(II)}, \quad (18)$$

$$\frac{\partial A_y^{(I)}}{\partial x}-M_z^{(I)}=\frac{\partial A_y^{(II)}}{\partial x}-M_z^{(II)}, \qquad A_y^{(I)}=A_y^{(II)}, \quad (19)$$

$$-\frac{\partial A_z^{(I)}}{\partial x}-M_y^{(I)}=-\frac{\partial A_z^{(II)}}{\partial x}-M_y^{(II)}, \qquad A_z^{(I)}=A_z^{(II)}. \quad (20)$$

式（１８）～（２０）が成立すれば、式（１２）～（１４）は十分に成立するが、$\frac{\partial A_x}{\partial x}$に対する条件が欠落している。

ところで、磁気ベクトルポテンシャル$\mathbb{A}$を用いた支配方程式（7）を解く場合には$\mathbb{A}$の値とその微分値に対する接合条件が必要である。従って式（18）〜（20）に示した接合条件では不十分であり、支配方程式（7）は一意的には解けない。[12]

接合面がｚ－ｘ平面、ｘ－ｙ平面の場合にも同様の条件式が成り立つ。

４．Galerkin法による離散化

式（7）の独立変数Ａはベクトルであるので、Ａの各成分に独立にGalerkin法を用いて離散化する。[13]

ｘ方向成分に対して

$$
\begin{aligned}
G_x &= \iiint_V N\left(\frac{1}{\mu_o}\nabla^2\mathbb{A} + \frac{1}{\mu_o}\,\mathrm{rot}\ \mathbb{M} + \mathbb{J}_o\right)_x dxdydz \\
&= \frac{1}{\mu_o}\iiint_V N\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) dxdydz \\
&\quad + \frac{1}{\mu_o}\iiint_V N\left(\frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z}\right) dxdydz + \iiint_V N J_{ox}\, dxdydz \\
&= \frac{1}{\mu_o}\iint_S N(\mathrm{grad}\ A_x)\cdot\mathbb{n}dS + \frac{1}{\mu_o}\iint_S N(\mathbb{j}\ M_z - \mathbb{k}\ M_y)\cdot\mathbb{n}dS \\
&\quad - \frac{1}{\mu_o}\iiint_V \left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right) dxdydz \\
&\quad - \frac{1}{\mu_o}\iiint_V \left(M_z\frac{\partial N}{\partial y} - M_y\frac{\partial N}{\partial z}\right) dxdydz + \iiint_V N J_{ox}\, dxdydz \\
&= 0 \qquad (21)
\end{aligned}
$$

ただし、式（21）において、Ｎ：形状関数、$\mathbb{n}$：境界面における単位法線方向ベクトル、

$\mathbb{i}$, $\mathbb{j}$, $\mathbb{k}$: ｘ，ｙ，ｚ方向の単位ベクトル。

ｙ、ｚ方向成分に対しても同様に離散化が可能である。

5．離散式における境界項の検討と有限要素式

式（２１）の表面積分項[14]は接合条件式（１５）～（１７）より消去可能であり、Neumann. Dirichlet 条件にも適合する。従ってｘ方向成分に対する有限要素式は次式となる。

$$G_x = -\frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial A_x}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)dxdydz - \frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(M_z\frac{\partial N}{\partial y} - M_y\frac{\partial N}{\partial z}\right)dxdydz + \iiint_V N J_{ox}\,dxdydz = 0 \quad . \tag{22}$$

同様にｙ，ｚ方向成分に対しては次式を得る。

$$G_y = -\frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial A_y}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)dxdydz - \frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(M_x\frac{\partial N}{\partial z} - M_z\frac{\partial N}{\partial x}\right)dxdydz + \iiint_V N J_{oy}\,dxdydz = 0 \quad , \tag{23}$$

$$G_z = -\frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(\frac{\partial N}{\partial x}\frac{\partial A_z}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y}\frac{\partial A_z}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)dxdydz - \frac{1}{\mu_0}\iiint_V\left(M_y\frac{\partial N}{\partial x} - M_x\frac{\partial N}{\partial y}\right)dxdydz + \iiint_V N J_{oz}\,dxdydz = 0 \quad . \tag{24}$$

式（２２）～（２４）はゲージ条件を含んだ有限要素式であり、材料非線形性についても対応可能である。[15],[16] また、本定式化によれば磁気ベクトルポテンシャルの各成分を分けてマトリクスを解くことが可能である。従って計算機のメモリー、計算時間の節約が可能である。

6．おわりに

磁気ベクトルポテンシャルを用いた有限要素法による静磁界解析におけるゲージ条件について論じ、

（１）有限要素法による静磁界解析においては、異なる磁性体の境界における接合条件を満たすためにゲージ条件の導入が必要であることを示した。

（2）ゲージ条件を含んだ有限要素定式化を示した。

（3）本定式化によれば、磁気ベクトルポテンシャルの各成分を分けて解析できるため、計算機のメモリー、計算時間の節約が可能である。

なお、数値計算結果は次の機会に報告する。

謝辞

本研究を進めるにあたり、御指導・御助言を戴いた新潟大学工学部　小林良和教授、仙石正和助教授、アルプス電気㈱新潟事業部　稲田明弘課長に深謝致します。

参考文献

[1] M.V.K.Chari and P.P.Silvester, "Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems", Eds. New York:John Wiley & Sons, 1980.

[2] 中田，高橋，" 電気工学の有限要素法"，森北出版，（昭５７）

[3] N.A.Demardash, T.W.Nehl, F.A.Foaud and O.A.Mohammed, "Three Dimensional Finite Element Vector Potential Formulation of Magnetic Fields in Electrical Apparatus",IEEE Trans. Power App. Syst., vol.PAS-100, pp.4104-4111, Aug. 1981.

[4] J.L.Coulomb, "Finite Element Three Dimensional Magnetic Field Computation", IEEE Trans. Magn., vol.MAG-17, pp.3241-3246, Nov. 1981.

[5] M.V.K.Chari, A.Konrad, J.D'Angelo and M.A.Palmo, "Finite Element Computation of Three-Dimensional Electrostatic and Magnetostatic Field Problems", IEEE Trans. Magn., vol.MAG-19, pp.2321-2324, Nov. 1983.

[6] C.J.Carpenter,"Comparison of Alternative Formulations of 3-Dimensional Magnetic-Field and Eddy-Current Problems at Power Frequencies",Proc. IEE, vol.124, Nov. 1977.

[7] J.Simkin and C.W.Trowbridge,"Three-dimensional Non-linear Electromagnetic Field Computations using Scalar Potentials",IEE Proc., vol.127, Pt.B, pp.368-374, Nov. 1980.

[8] 横井，荒谷，小貫，" 三次元有限・境界要素併用法による開領域静磁界検討用モデルの磁界解析"，日本シミュレーション学会第８回電気・電子への有限要素法の応用シンポジウム論文集，pp.99 ～104，(昭６２)

[9] 池田，" 有限要素法による三次元磁界解析におけるゲージの問題"，電学会静止器・回転機合同研資，SA-87-20，RM-87-57，pp.21-30　（昭６２）

[10] 野瀬，大戸，椛島，" 有限要素法における三次元静磁界解析の検討"，電学会静止器・回転機合同研資，SA-87-30，RM-87-67，pp.117-126，（昭６２）

[11] J.A.Stratton, "Electromagnetic Theory", New York:McGRAW HILL, pp.254-256,1941.

[12] 長谷部，鹿野，" 三次元磁界解析における境界条件の扱いについて"，日本シミュレーション学会第７回電気・電子への有限要素法の応用シンポジウム論文集，pp.133-138，（昭６１）

[13] K.H.Huebner," 有限要素法"，pp.116-117　科学技術出版，（昭５３）

[14] 長谷部，鹿野，" Dyadic表現による三次元磁界解析の定式化"，電学論（A），103巻，pp.181-188，（昭５８－０４）

[15] 中田，井上，和田，" 有限要素法による変質層を考慮した薄膜ヘッドの磁界解析"，住友特殊金属㈱　社内報，（昭５６）

[16] Y.KANAI, T.Abe, M.Iizuka and K.Mukasa,"Fast and Stable Non-Linear Converging Method", IEEE Trans. Magn., vol.MAG-23, pp.3290-3292, Sep. 1987.